# שאלה 1

1. **יחס הנסיגה של :**

מספר הצירופים השונים האפשריים מתחלק ל2 קבוצות, שמהוות חלוקה של קבוצת כל הצירופים השונים האפשריים, הבאות:

*קבוצה אחת-* במקום הראשון במלבן עומד בלוק- מספר האיברים בקבוצה זו הוא (הרי יש 2 בלוקים מבין השלושה בשאלה שיכולים לעמוד-ירוק ולבן).

*קבוצה שתים-* במקום הראשון והשני במלבן שוכבים 2 בלוקים אחד מעל השני- מספר האיברים בקבוצה זו הוא (כי יש 3 מצבים למיקום 2 בלוקים אחד מעל השני בשכיבה: כחול מעל ירוק, כחול מעל כחול וירוק מעל ירוק).

מכיוון ש2 הקבוצות המפורטות הן חלוקה של קבוצת כל הצירופים השונים האפשריים an שווה למספר האיברים בקבוצה הראשונה + מספר האיברים בקבוצה השניה. לכן **יחס הנסיגה הוא**:

**תנאי התחלה מספיקים:**

כיוון שיש אפשרות אחת בדיוק לרצף מלבן בגודל 0X2 (מלבן ריק):

בגלל שלרצף מלבן בגודל 1X2 יש 2 דרכים בדיוק, כפי שהוסבר לעיל:

1. **פתרון יחס הנסיגה:**

כיוון שיחס הנסיגה שהתקבל הוא יחס נסיגה לינארי אפתור אותו בשיטה המיועדת למציאת נוסחאות מפורשות של יחסי נסיגה לינאריים. מציאת הנוסחה המפורשת ל:

אציב במקום את :

אחלק את 2 אגפי המשוואה ב:

כלומר:

כלומר:

פתרונות המשוואה שהתקבלה(המשוואה האופיינית):

ו

כעת בגלל ש2 הפתרונות הם פתרונות שונים(אין למשווה האופיינית אף 2 פתרונות זהים) היא מהצורה:

כעת נשאר למצוא את A1 וA2, אציב את הערכים התחיליים ואח"כ אמצא את A1 וA2 ממערכת המשוואות שמתקבלת:

*עבור :*

*לכן משוואה 1 היא:*

*עבור :*

*לכן משוואה 2 היא:*

*פתרון מערכת המשוואות:*

*אחרי חיבור המשוואות מקבלים:*

*ולכן . ע"י הצבת במשוואה הראשונה קבלתי .*

*כעת אציב את ו ב- :*

לכן **הנוסחה המפורשת עבור**  היא:

מש"ל.

# שאלה 2:

1. הפונקציה היוצרת g(x) מסומנת כ- , הפונקציה היוצרת f(x) היא , ומכפלת f(x) בg(x) נתונה ע"י פונקציה יוצרת של הסדרה: 1,0,0,… שאני אסמן ב (c0=1,c1=0,…).מהחומר בספר והנוסחאות בסוף הממן ידוע ש:

אם , ו אז

מכיוון שבתרגיל כל תנאי המשפט הנ"ל מתקיימים מתקיימת המסקנה: .

מציאת :

אציב k=0 במשוואה :

**לכן:**

מציאת :

אציב k=1 במשוואה :

**לכן:**

מציאת :

אציב k=2 במשוואה :

**לכן:**

מציאת :

אציב k=3 במשוואה :

**לכן:**

1. בשאלה סומן:

נתון בשאלה ש

אחשב את :

אכפיל את 2 האגפים ב4:

אסמן לשם נוחות את המקדמים של הפונקציה היוצרת ב ( לכל i טבעי), ואת המקדמים של הפונקציה היוצרת של אסמן בBi (הם סומנו קודם בסאיף א בci והם נתונים במפורש בשאלה).

כעת אחשב את ע"י נוסחת כפל פונקציות יוצרות שמופיע בעמוד 20 בחוברת הקורס:

**תשובה:**

# שאלה 3:

**אתחיל עם האגף הימני:**

בעזרת הבינום של ניוטון אפתח את :

השוויון האחרון בצד ימין הוא בגלל שלכל K שגדול מm המקדם של הוא אפס (נובע מהגדרת ).

כעת אציב ב :

לכן הפונקציה היוצרת של היא: .

המקדם של :

את המקדם של אקבל ע"י הצבת K=3 בפיתוח שקבלנו:

**ולכן המקדם של באגף ימין הוא: .**

**עכשיו אטפל באגף שמאל:**

אפתח לטור את :

אשתמש בנוסחת הבינום:

השוויון האחרון בצד ימין הוא בגלל שלכל K שגדול מn המקדם של הוא אפס (נובע מהגדרת ) כפי שהוסבר קודם.

למקדמים של אקרא בשם, אקרא להם , ול אקרא .

הפיתוח של *לטרור:*

*כבר עשיתי את הפיתוח הזה למעלה והתוצאה:*

גם הפעם למקדמים של אקרא בשם, אקרא להם , ול אקרא .

מציאת המקדם של באגף שמאל:

איעזר בנוסחא 2 מין הממן (בנוסחה אעשה שימוש לחישוב טור של מכפלת 2 פונקציות כשל2 הפונקציות האילה כבר יש פיתוח לטור):

עפ"י נוסחא 2 הנ"ל המקדם של בפונקציה היוצרת של מכפלת הפונקציות f וg, אקרא לו , הוא:

חישוב המקדם של באגף שמאל הוא:

אציב K=6:

**לכן המקדם של באגף שמאל הוא .**

**הזהות הקומבינטורית המתקבלת:**

שני האגפים בשוויון שבשאלה שווים ולכן עבור כל טבעי המקדמים של בשני האגפים שווים ולכן:

מהשוואת המקדמים של ב2 האגפים מקבלים את הזהות:

**בדיקה עבור m=4:**

ערך אגף שמאל עבור m=4:

אציב m=4:

ערך אגף שמאל עבור m=4 הוא -4.

ערך אגף ימין עבור m=4:

ערך אגף ימין עבור m=4 גם הוא -4. **קבלתי שהזהות מתקיימת עבור m=4.**

# שאלה 4:

1. *מספר אפשרויות החלוקה של n מחשבים בין 3 הרכבים השונים כאשר כל אחד יכול לקבל בין 0 (כלל) ל24 (כלל) הוא כמספר הפתרונות של המשוואה: אבל יחד עם התנאי ש לכל ( טבעי) שייך ל[0,24] ( הוא כמובן מספר טבעי).*

*מכיוון שאת הפונקציה היוצרת בונים באופן הבא: עבור כל אחד מין המשתנים במשוואה כותבים סוגריים ובהם כאשר k הוא הערך התחתון שיכול משתנה זה לקבל לפי תנאי השאלה ואילו t הוא הערך העליון שהוא יכול לקבל. ואז כופלים בין כל הסוגריים ומקבלים את הפונקציה היוצרת; הפונקציה היוצרת של המשוואה עם התנאים שתיארתי היא:*

1. *אניח שn=70 . את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים ניתן למצוא ע"י חישוב המקדם של . אציג את הפונקציה היוצרת שקיבלתי באופן קצת אחר:*

אחפש את המקדם של בפונקציה :

אשתמש בנוסחת הבינום בשביל לפתוח את :

כעת אציב את הפיתוח של ב:

כעת בשביל לקבל את המקדם של ב מה שצריך לעשות הוא למצוא את המקדם של ב, ממנו להחסיר 3 פעמים את המקדם של ב ולהוסיף 3 פעמים את המקדם של ב:

*לפי שאלה 7.10 בספר (עמ' 129) המקדם של הוא כאשר n הוא החזקה בביטוי*

*.*

*עבור נתוני השאלה n=3;*

*המקדם של ב הוא*

*המקדם של ב הוא*

*המקדם של ב הוא*

לכן המקדם של ב הוא:

***תשובה****:*

***מספר הדרכים לחלק את 70 המחשבים בין שלושת המכוניות השונות כאשר כל מכונית יכול לקבל כל כמות של מחשבים בין 0 כלל ל24 כלל הוא 6.***